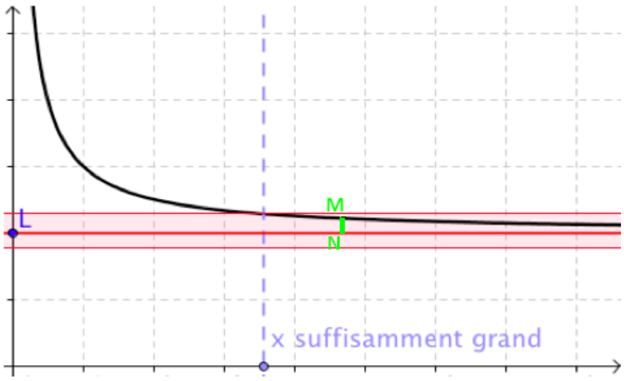
I. Limite d'une fonction à l'infini

1) Limite finie à l'infini

Intuitivement :
On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple :
La fonction définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $+\infty$.
En effet, les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que x est suffisamment grand.
La distance MN tend vers 0.



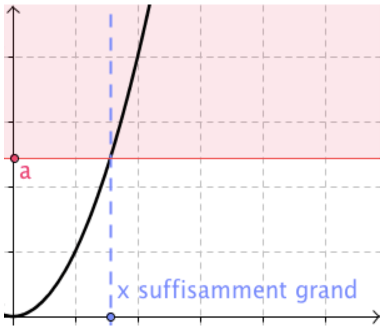
Définitions : - La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.
- La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Remarque :
Lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe de la fonction "se rapproche" de son asymptote.

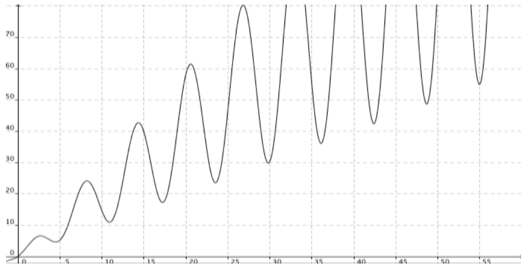
2) Limite infinie à l'infini

Intuitivement :
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

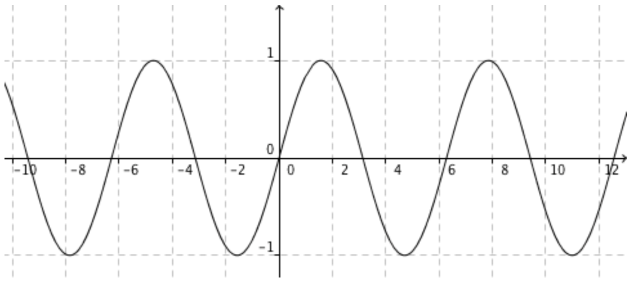
Exemple :
La fonction définie par $f(x) = x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment grand.



Remarques :
- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.



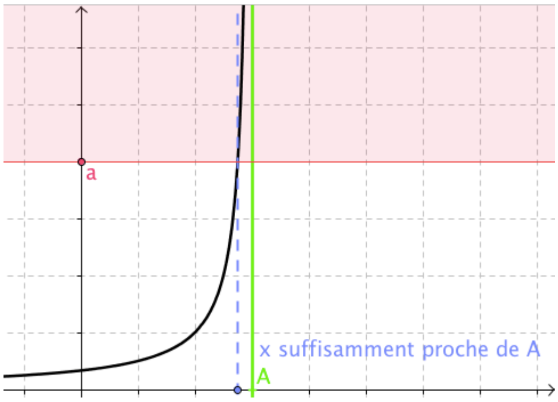
3) Limites des fonctions usuelles

Propriétés :
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

II. Limite d'une fonction en un réel A

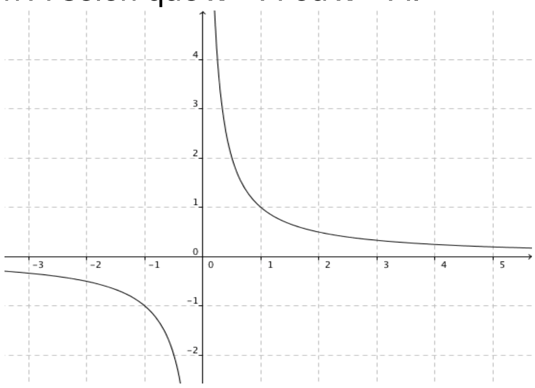
Intuitivement :
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de A.

Exemple :
La fonction représentée ci-dessous a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers A.
En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment proche de A.



Définition : La droite d'équation $x = A$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f si : $\lim_{x \to A} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to A} f(x) = -\infty$.

Attention :
Certaines fonctions admettent des limites différentes en A selon que $x > A$ ou $x < A$.



On parle de **limite à gauche** de 0 et de **limite à droite** de 0.

Déterminer graphiquement des limites d'une fonction :

Exercices : n° 34, 35, 37 et 38 page 71 + n° 40 page 72.

III. Opérations sur les limites

1) Limite d'une somme

$\lim_{x \to \alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \to \alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to \alpha} f(x) + g(x) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

2) Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)g(x) =$	$L\,L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

3) Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Remarque :
Les quatre formes indéterminées sont les mêmes que pour les suites :

$$"\infty - \infty", "0 \times \infty", "\frac{\infty}{\infty}" \text{ et } "\frac{0}{0}".$$

Méthodes :
- Lever une forme indéterminée - NON EXIGIBLE –
- Déterminer une asymptote.

Voir fiches sur http://urbanmathproject.free.fr/documents.php#Classe_de_Terminale

IV. Calculs de limites par composition et comparaison

1) Composition de limites

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par : $f(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$

Calculer la limite de la fonction f en +¥ .

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \dfrac{1}{x} = 2$

Donc, comme limite d'une fonction composée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = \sqrt{2}$

2) Comparaison

Exemple : Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \sin x$

Exercices : n° 42, 52, 54, 58 et 67 pages 72 à 74 + n° 102 et 104 page 80.